УДК 654.1/5(470.53–25)

Оптимальное транспортное обслуживание при равномерном распределении объектов

Анатолий ГУСЕВ
Anatoly I. GUSEV

Сергей ГУСЕВ
Sergey A. GUSEV

Александр МИЛЕВСКИЙ
Alexander S. MILEVSKY

Гусев Анатолий Иванович *– кандидат физико-математических наук, доцент Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.*
Гусев Сергей Анатольевич *– исполнительный директор Страхового акционерного общества «ВСК», Москва, Россия.*
Милевский Александр Станиславович *– кандидат физико-математических наук, доцент РУТ, Москва, Россия.*

Provision of Optimal Transit Service under Even Distribution of Facilities
(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 40)

Статья продолжает тему оптимального расположения объектов в системе сетевых структур (см. «МТ», 2017, № 4 [5]), в частности развивает теоретико-методологические подходы к моделированию вариантов распределения пунктов обслуживания жителей в границах жилого микрорайона с кусочно-постоянной плотностью расселения. Цель – минимизировать затраты на перемещения между объектами, соблюдая при этом рациональные пропорции в том числе и транспортного спроса с транспортными предложениями.

Ключевые слова: равномерный закон распределения, математическая модель, социальный объект, транспорт, городской микрорайон, оптимальное расположение, экстремум функций.

Все мы пользуемся транспортом, магазинами, больницами, и удобно, когда социальное учреждение, пункт обслуживания транспорта расположены вблизи от нас, тех районов, где наши работа, учёба, жилье. То же относится к местам расположения аварийных, пожарных, спасательных и других служб. Здесь мы рассмотрим экономико-математическую модель оптимального расположения социальных объектов для обслуживания территории в случае их кусочно-постоянного размещения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим следующую модель. Пусть у нас есть жилая зона, размещённая вдоль отрезка $[c, d]$ с неотрицательной плотностью населения $f(x)$. Функцию $f(x)$ будем считать кусочно-непрерывной. Требуется разместить на этом отрезке несколько пунктов обслуживания так, чтобы суммарные затраты на перемещения до них были минимальны. Предполагается, что потенциальный посетитель пользуется ближайшим пунктом обслуживания.

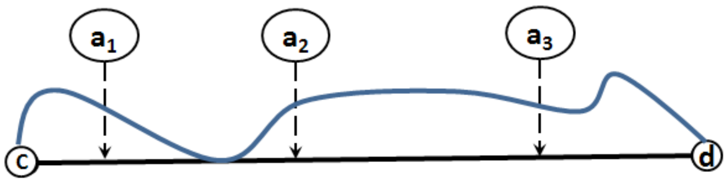


Рис. 1. Размещение объектов.

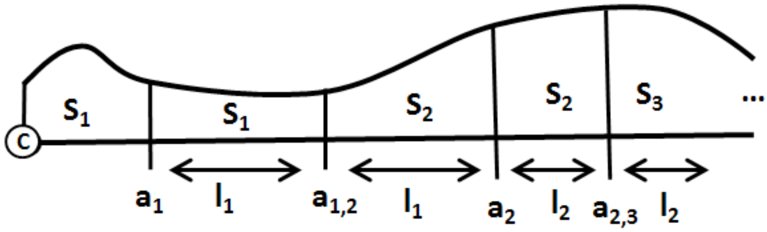


Рис. 2. Необходимые условия оптимальности.

Пункты обозначим через a_i, $i = 1, 2, ...,$ n (см. рис. 1). Соответственно

$$a_{1,2} = \frac{a_1 + a_2}{2},\ a_{2,3} = \frac{a_2 + a_3}{2}, ...$$

– середины отрезков.

У каждого пункта a_i есть некоторая «зона притяжения» слева и справа, идущая к нему от середины отрезка, соединяющего с соседним пунктом, или (в концах) от крайних точек c или d. Затраты пропорциональны выражению

$$Q(a) = \int_c^{a_1} (a_1 - x) f(x)dx + \int_{a_1}^{a_{1,2}} (x - a_1) f(x)dx + \\ + \int_{a_{1,2}}^{a_2} (a_2 - x) f(x)dx + \int_{a_2}^{a_{2,3}} (x - a_2) f(x)dx + ... + \\ + \int_{a_{n-1,n}}^{a_n} (a_n - x) f(x)dx + \int_{a_n}^{d} (x - a_n) f(x)dx.$$

Выпишем условия экстремума для целевой функции Q. Вычисляя частные производные, находим:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = \int_c^{a_1} f(x)dx - \int_{a_1}^{a_{1,2}} f(x)dx,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_2} = \int_{a_{1,2}}^{a_2} f(x)dx - \int_{a_2}^{a_{2,3}} f(x)dx, ...,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_n} = \int_{a_{n-1,n}}^{a_n} f(x)dx - \int_{a_n}^{d} f(x)dx.$$

Приравнивая производные нулю, получаем для каждого размещаемого пункта необходимые условия экстремума в виде равенства «населения» в левой и правой «зонах притяжения»:

$$\begin{cases} \int_c^{a_1} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_{1,2}} f(x)dx \\ \int_{a_{1,2}}^{a_2} f(x)dx = \int_{a_2}^{a_{2,3}} f(x)dx \\ \quad ... \\ \int_{a_{n-1,n}}^{a_n} f(x)dx = \int_{a_n}^{d} f(x)dx. \end{cases} \qquad (1)$$

Эти условия легко получить и простыми рассуждениями. Пусть нет равенства населения в левой и правой зонах притяжения некоторого пункта. Тогда, например, если правая зона «больше» левой, то малый сдвиг пункта вправо, очевидно, уменьшит затраты. Это и означает отсутствие экстремума.

Перепишем условия (1) в более удобной форме, используя обозначение

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Тогда получается цепочка равенств

$$F(a_{1,2}) = 2F(a_1),\quad F(a_{2,3}) = 2F(a_2) - F(a_{1,2}),$$
$$F(a_{3,4}) = 2F(a_3) - F(a_{2,3}), ...,$$
$$F(d) = 2F(a_n) - F(a_{n-1,n}).$$

В предположении[1] нули функции f(x) – изолированные (2) возникает цепочка рекуррентных формул:

[1] Случай, когда это условие нарушается, будет обсуждаться далее.

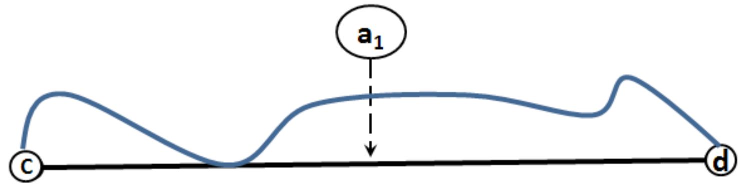


Рис. 3. Один пункт обслуживания.

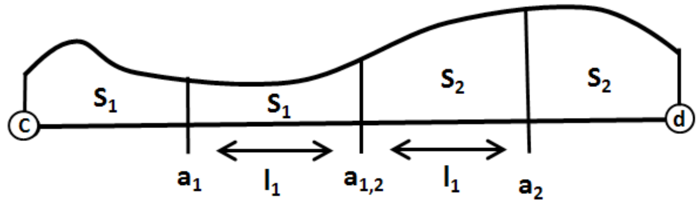


Рис. 4. Необходимые условия оптимальности для двух пунктов.

$$a_{1,2} = G\left(2F\left(a_1\right)\right),\quad a_2 = 2a_{1,2} - a_1,$$
$$a_{2,3} = G\left(2F\left(a_2\right) - F\left(a_{1,2}\right)\right),\quad a_3 = 2a_{2,3} - a_2, \ldots,$$
$$d = G\left(2F\left(a_n\right) - F\left(a_{n-1,n}\right)\right) \Leftrightarrow \qquad (3)$$
$$\Leftrightarrow F\left(d\right) = 2F\left(a_n\right) - F\left(a_{n-1,n}\right),$$

где $G(x)$ – функция, обратная к $F(x)$. Подставив каждое равенство в следующее, получаем уравнение вида

$$H(a_1) = F(d) \qquad (4)$$

с некоторой функцией $H(x)$. Множество решений такого уравнения (которое, как мы увидим, может быть даже континуальным) определяет место размещения первого пункта обслуживания. Дальнейшие пункты при условии (2) определяются по рекуррентным формулам (3) однозначно (см. рис. 2).

Найденные таким образом варианты удовлетворяют необходимым условиям экстремума, то есть представляют собой стационарные точки функции Q, но необязательно являются её локальными минимумами. Наличие и вид экстремума, как правило, можно определить, вычислив частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 F}{\left(\partial a_1\right)^2} = 2f_1 - 0{,}5f_{1,2},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2} = -0{,}5f_{1,2}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\left(\partial a_2\right)^2} = 2f_2 - 0{,}5f_{1,2} - 0{,}5f_{2,3},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_2 \partial a_3} = -0{,}5f_{2,3}, \ldots,$$

где использованы обозначения $f_i = f(a_i)$, $f_{i,,j} = f(a_{i,,j})$.

В результате получаем следующую (трёхдиагональную) матрицу Гессе:

$$\begin{pmatrix} 2f_1 - 0{,}5f_{1,2} & -0{,}5f_{1,2} & 0 & \ldots \\ -0{,}5f_{1,2} & 2f_2 - 0{,}5f_{1,2} - 0{,}5f_{2,3} & -0{,}5f_{2,3} & \ldots \\ 0 & -0{,}5f_{2,3} & 2f_2 - 0{,}5f_{1,2} - 0{,}5f_{2,3} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Для применения критерия Сильвестра потребуется, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в окрестностях точек a_i.

Рассмотрим простые частные случаи.

ОДИН ПУНКТ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В такой ситуации необходимые условия (1) превращаются в

$$\int_c^{a_1} f(x)dx = \int_{a_1}^{d} f(x)dx,$$

то есть точка a_1 должна делить «население» на две равные части (см. рис 3). Ясно, что такая «медианная» точка:

- или одна (в частности, так будет при выполнении условия (2));
- или же «медианные» точки образуют целый отрезок $[\alpha; \beta]$ (где $\alpha \neq c$; $\beta \neq d$).

В последнем случае на всём этом отрезке $f(x) \equiv 0$ (в точках α и β можно переопределить f по непрерывности). То есть все точки отрезка $[\alpha; \beta]$ дают одно и то же значение целевой функции. При выходе из отрезка $[\alpha; \beta]$ происходит увеличение значений Q, так что каждая медианная точка является допустимым ответом.

ДВА ПУНКТА ОБСЛУЖИВАНИЯ

В такой ситуации необходимые условия (1) превращаются в условия «баланса» зон притяжения:

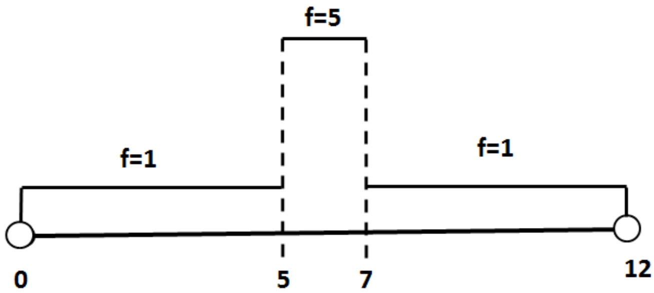


Рис. 5. Пример симметричного распределения.

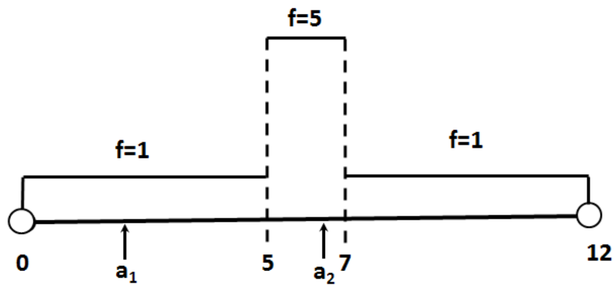


Рис. 6. Оптимальное размещение.

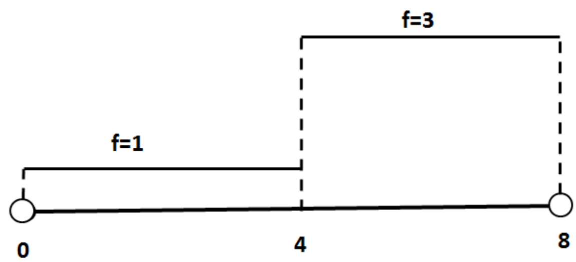


Рис. 7. Пример распределения.

$$\begin{cases} \int\limits_{c}^{a_1} f(x)dx = \int\limits_{a_1}^{a_{1,2}} f(x)dx \\ \int\limits_{a_{1,2}}^{a_2} f(x)dx = \int\limits_{a_2}^{d} f(x)dx. \end{cases}$$

Графически необходимое условие экстремума выглядит, как показано на рис. 4.

В частности,
$F(d) = 2S_1 + 2S_2$, $F(a_2) - F(a_1) = = S_1 + S_2 = F(d)/2$.

Рекуррентные соотношения (3) в этом случае записываются так:

$$a_{1,2} = G\left(2F\left(a_1\right)\right), \quad a_2 = 2a_{1,2} - a_1,$$
$$F\left(d\right) = 2F\left(a_2\right) - F\left(a_{1,2}\right),$$

и уравнение (4) принимает вид
$$2F\left(2G\left(2F\left(a_1\right)\right) - a_1\right) - 2F\left(a_1\right) = F\left(d\right).$$

Соответственно матрица Гессе:
$$A = \begin{pmatrix} 2f_1 - 0{,}5f_{1,2} & -0{,}5f_{1,2} \\ -0{,}5f_{1,2} & 2f_2 - 0{,}5f_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в предположении, что функция $f(x)$ непрерывна в окрестностях точек a_1 и a_2, критерий Сильвестра даёт следующие достаточные условия локального минимума:
$$\begin{aligned} &4f_1 > f_{1,2}, \\ &4f_1 f_2 > f_{1,2}\left(f_1 + f_2\right). \end{aligned} \qquad (5)$$

<u>Пример 1.</u> Возьмём следующую ситуацию (см. рис 5).

Тогда
$$F\left(x\right) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 5, \\ 5x - 20, & 5 \le x < 7, \\ x + 8, & 7 \le x \le 12, \end{cases}$$

$$G\left(x\right) = F^{-1}\left(x\right) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 5, \\ (x + 20)/5, & 5 \le x < 15, \\ x - 8, & 15 \le x \le 20. \end{cases}$$

Пусть точка a_1 имеет координату x. Из соотношений (3) получаем последовательно

$$S_1 = F\left(x\right), \quad a_{1,2} = G\left(2F\left(a_1\right)\right) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 2{,}5, \\ 0{,}4x + 4, & 2{,}5 \le x < 5, \\ 2x - 4, & 5 \le x < 5{,}5, \\ 10x - 48, & 5{,}5 \le x \le 6, \end{cases}$$

$$a_2 = 2a_{1,2} - a_1 = \begin{cases} 3x, & 0 \le x < 2{,}5, \\ -0{,}2x + 8, & 2{,}5 \le x < 5, \\ 3x - 8, & 5 \le x < 5{,}5, \\ 19x - 96, & 5{,}5 \le x \le 6, \end{cases}$$

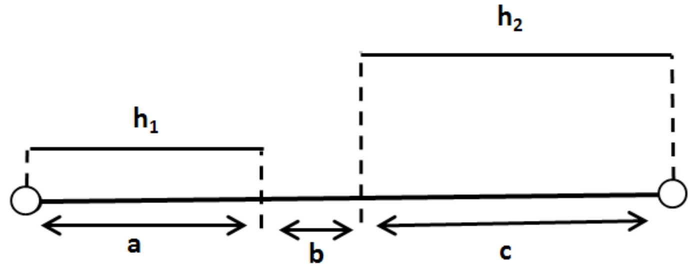


Рис. 8. Наличие «нулевой» зоны.

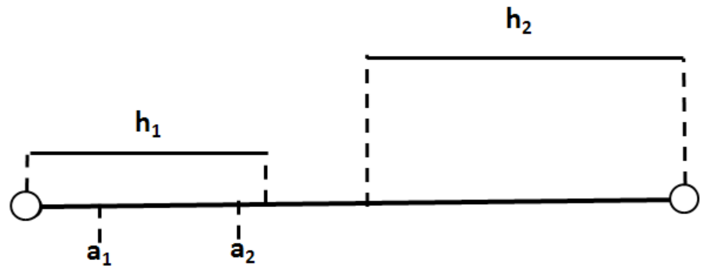


Рис. 9. Возможное размещение пунктов.

$$F(12)=20=2F(a_2)-F(a_{1,2})=$$
$$=\begin{cases}4x, & 0\le x<5/3,\\ 28x-40, & 5/3\le x<7/3,\\ 4x+16, & 7/3\le x<2{,}5,\\ -2{,}4x+32, & 2{,}5\le x<5,\\ -4x+40, & 5\le x\le 5{,}5,\\ 28x-136, & 5{,}5\le x\le 6.\end{cases}$$

Отсюда находим три варианта:

$$\begin{pmatrix}a_1=15/7, a_2=45/7,\\ Q=190/7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a_1=5, a_2=7,\\ Q=30\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}a_1=39/7, a_2=69/7,\\ Q=190/7\end{pmatrix}.$$

Средний, симметричный, представляет собой локальный максимум целевой функции Q. Ответами для исходной задачи являются первый вариант (рис. 6) и симметричный ему третий.

Пример 2. Рассмотрим ситуацию на рис. 7.

Аналогичные выкладки приводят к уравнению

$$F(8)=16=2F(a_2)-F(a_{1,2})=\begin{cases}4x, & 0\le x<4/3,\\ 16x-16, & 4/3\le x<2,\\ 16, & 2\le x\le 4,\\ 12x-32, & 4<x\le 40/9.\end{cases}$$

Решением этого уравнения относительно x является весь отрезок [2, 4]. Как легко проверить, значение целевой функции при этом постоянно и равно 16. Ответом для исходной задачи становится

$$\begin{pmatrix}a_1=x, \quad 2\le x\le 4,\\ a_2=\frac{1}{3}x+\frac{16}{3},\\ Q=16\end{pmatrix}.$$

ДВА ПУНКТА ПРИ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЯ (2)

Теперь ситуация, когда условие (2) нарушено и функция f обращается в 0 на внутреннем отрезке (рис. 8).

Пусть требуется разместить два пункта обслуживания.

1) Сначала случай, когда оба пункта размещены на левом отрезке (см. рис. 9).

Из условия равенства площадей находим

$$a_{1,2}=2a_1, \quad a_2=3a_1, \quad h_1\cdot a_1=h_1(a-a_2)+h_2\cdot c,$$

откуда

$$a_1=\frac{1}{4}(a+Kc), \quad a_2=\frac{3}{4}(a+Kc), \quad K=\frac{h_2}{h_1}.$$

Обе точки действительно лежат в первом отрезке, если дополнительно

$$\frac{3}{4}(a+Kc)\le a \quad \Leftrightarrow \quad a\ge 3Kc,$$

или если ввести обозначения $a\cdot h_1=И_1$, $c\cdot h_2=И_2$ – количество «жильцов»,

$И_1\ge 3\,И_2$. (6)

Подобное размещение, как видно из условия (5), обеспечивает локальный минимум целевой функции. Значение функции Q при этом:

$$Q=h_1\int_0^{2a_1}|a_1-x|dx+h_1\int_{2a_1}^{a}|3a_1-x|dx+h_2\int_{a+b}^{a+b+c}(x-3a_1)dx=$$
$$=h_1\frac{3a_1^2}{2}+h_1\frac{(a-3a_1)^2}{2}+h_2\frac{(a+b+c-3a_1)^2}{2}-$$
$$-h_2\frac{(a+b-3a_1)^2}{2}.$$

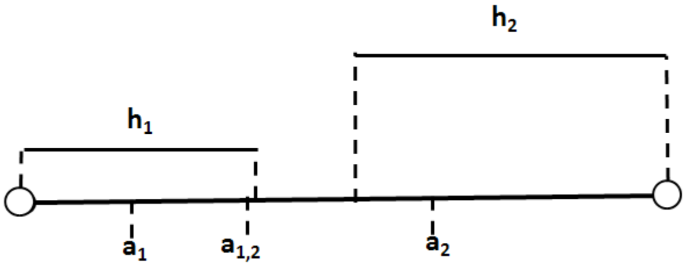


Рис. 10. Другое возможное размещение пунктов.

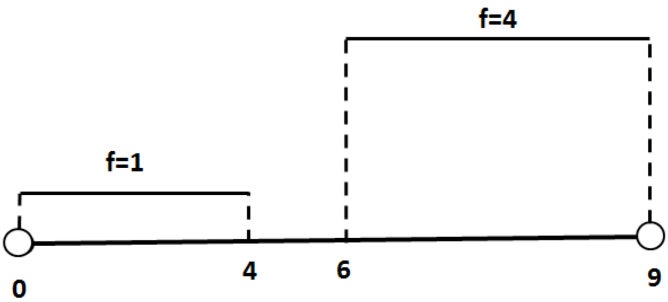


Рис. 11. Пример распределения.

2) Случай, когда оба пункта обслуживания размещены в правой зоне, сводится к предыдущему очевидными переобозначениями:

$$a \leftrightarrow c, \quad h_1 \leftrightarrow h_2, \quad x \leftrightarrow a+b+c-x.$$

Осталось рассмотреть случай, когда в первой и третьей зонах находятся по одному пункту обслуживания.

3) Сразу заметим, что если «центральная» точка $a_{1,2}$ попадает на средний, «нулевой», отрезок, то единственная возможность обеспечить равенство площадей – разместить пункты в серединах левого и правого отрезков. Тогда

$$\begin{pmatrix} a_1 = \dfrac{a}{2},\; a_2 = a+b+\dfrac{c}{2} \\ Q = \dfrac{h_1 a^2 + h_2 c^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Точка $a_{1,2}$ действительно попадает в средний отрезок при условии

$$|c-a| \le 2b. \qquad (7)$$

4) Теперь возьмём случай (рис. 10), когда точка $a_{1,2}$ попадает на левый отрезок (с правым всё аналогично).

Опять из равенства площадей:

$$a_{1,2} = 2a_1, \quad a_2 = 3a_1,$$
$$h_1\left(a-a_{1,2}\right) + h_2\left(a_2-a-b\right) = h_2\left(a+b+c-a_2\right).$$

Отсюда при $K \ne 1/3$:

$$a_1 = \frac{K\left(a+b+c/2\right)-a/2}{3K-1}.$$

Если $K < 1/3$, то второе из неравенств (5) имеет обратный знак, так что экстремума нет.

Если $K > 1/3$, то возникают дополнительные требования:

$$0 \le a_{1,2} = \frac{2K\left(a+b+c/2\right)-a}{3K-1} \le a;$$
$$a+b \le a_2 = 3a_1 \le a+b+c.$$

Если же $K = 1/3$, то в зависимости от значения числителя дроби для a_1 стационарных точек рассматриваемого вида или не будет вовсе, или они могут образовывать целый интервал возможных значений. Действительно, стационарное расположение такого вида возможно, только если $a + b + c/2 = 3a/2$, то есть $a = 2b + c$. И нетрудно понять, что тогда решением является любая пара $(a_1;\, 3a_1)$, где $(a + b)/3 \le a_1 \le a/2$.

<u>Пример 3.</u> Рассмотрим ситуацию на рис. 11.

В этом случае $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$, $K = 4$. Для «центрального» расположения пунктов обслуживания:

$$\begin{pmatrix} a_1 = 2,\; a_2 = 7{,}5, \\ Q = 13 \end{pmatrix}.$$

Если $a_{1,2} \le 4$, то

$$a_1 = \frac{a_{1,2}}{2}, \quad a_2 = 2a_{1,2} - a_1 \le 6,$$

что невозможно из-за нарушения условия равенства площадей.

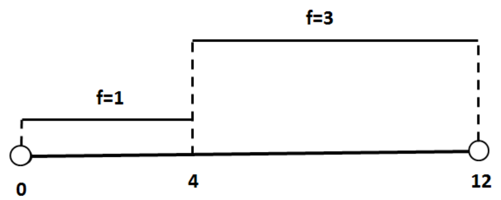


Рис. 12. Пример распределения.

Поскольку $И_2 \geq 3И_1$ $(12 \geq 12)$, то на правом отрезке имеются две точки. Найдём их по формулам:

$$a_1 = \frac{1}{4}(a + Kc), \quad a_2 = \frac{3}{4}(a + Kc), \quad K = \frac{h_2}{h_1}.$$

Но в «обратном» направлении:

$$\begin{pmatrix} a_1 = 6, \; a_2 = 8, \\ Q = 26. \end{pmatrix}.$$

Этот вариант уступает «центральному».

Пример 4. Пусть на участке обслуживания находятся два жилых узла T_1 и T_2 с соответствующими отрезками равномерного распределения – [0, 400 м], [500 м, 700 м], а «интенсивности» жилых узлов равны 3000, 500. Требуется оптимальным образом разместить два пункта обслуживания.

Имеем:

$$a = 400, \quad И_1 = 3000, \quad И_2 = 500,$$

$$h_1 = \frac{3000}{400} = 7{,}5, \quad c = 700 - 500 = 200,$$

$$h_2 = \frac{500}{200} = 2{,}5.$$

$$b = 500 - 400 = 100, \quad K = \frac{2{,}5}{7{,}5} = \frac{1}{3}.$$

Условие (6) выполнено, так что рассмотрим сначала случай, когда оба пункта размещены на первом участке. Имеем:

$$a_1 = \frac{1}{4}(a + Kc) = \frac{400 + 200/3}{4} \approx 116{,}67, \quad a_2 = 3a_1 = 350.$$

Значение целевой функции

$$Q = h_1 \frac{3a_1^2}{2} + h_1 \frac{(a - 3a_1)^2}{2} + h_2 \frac{(a + b + c - 3a_1)^2}{2} -$$

$$-h_2 \frac{(a + b - 3a_1)^2}{2} = 287500.$$

Условие (7) здесь также выполнено, поэтому можно рассмотреть и «центральное» размещение пунктов обслуживания:

$$\begin{pmatrix} a_1 = a/2 = 200, \\ a_2 = a + b + c/2 = 600, \\ Q = \left(h_1 a^2 + h_2 c^2\right)/4 = 300000 \end{pmatrix}.$$

Этот вариант хуже.

Наконец, берём случай, когда пункты обслуживания размещены и в первой, и в третьей зонах, а средняя точка находится в первой зоне. Так как $a + b + c/2 = 3a/2$, то решением является любая пара $(a_{1;} 3a_1)$, где $(a + b)/3 \leq a_1 \leq a/2$, т.е. точки

$$\begin{pmatrix} \frac{500}{3} \leq a_1 \leq 200, \\ a_2 = 3a_1, \\ Q = 325500 \end{pmatrix}$$

являются стационарными. Но этот вариант тоже уступает первому.

Итак, оптимальное расположение пунктов обслуживания:

$$\begin{pmatrix} a_1 \approx 116{,}67, \; a_2 = 350, \\ Q \approx 287500. \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Изменим в предыдущем примере третий отрезок с [500 м, 700 м] на [450 м, 650 м]. Тогда по-прежнему

$$a = 400, \quad h_1 = 7{,}5, \quad c = 200, \quad h_2 = 2{,}5, \quad K = \frac{2{,}5}{7{,}5} = \frac{1}{3}.$$

Изменится только b. Вариант с непрерывным расположением стационарных точек становится невозможным, а из двух остальных оптимальным по-прежнему окажется

$$(a_1 \approx 116{,}67, \; a_2 = 350).$$

Пример 6. Пусть на участке обслуживания находятся два жилых узла T_1 и T_2 с соответствующими отрезками равномерного распределения – [0, 400 м], [500 м, 600 м], а «интенсивности» жилых узлов соответственно равны 3000, 1000. Требуется оптимальным образом разместить два пункта обслуживания.

$$a = 400, \quad И_1 = 3000, \quad И_2 = 500,$$

$$h_1 = \frac{3000}{400} = 7{,}5, \quad c = 600 - 500 = 100,$$

$$h_2 = \frac{1000}{100} = 10. \quad b = 500 - 400 = 100,$$

$$K = \frac{10}{7{,}5} = \frac{4}{3}.$$

Условие (6) $И_1 \geq 3И_2$ выполнено, поэтому рассмотрим сначала случай, когда оба пункта обслуживания размещены на первом участке. Имеем:

$$a_1 = \frac{1}{4}(a + Kc) = \frac{400 + 400/3}{4} \approx 133{,}33, \quad a_2 = 3a_1 = 400.$$

Значение целевой функции

$$Q = h_1 \frac{3a_1^2}{2} + h_1 \frac{(a - 3a_1)^2}{2} + h_2 \frac{(a + b + c - 3a_1)^2}{2} -$$

$$-h_2 \frac{(a + b - 3a_1)^2}{2} = 350000.$$

Условие (7) не выполнено, так что «центральное» расположение пунктов не рассматриваем.

Остаётся вариант, когда пункты обслуживания расположены в крайних зонах и средняя точка не попадает в нулевой отрезок.

$$a_1 = \frac{K\left(a+b+c/2\right)-a/2}{3K-1} \approx 177{,}78,$$
$$a_2 = 3a_1 \approx 533{,}33.$$

В этом случае средняя точка попала в первый отрезок, а значение целевой функции Q = 316666,67, что лучше.

Итак, оптимальное расположение пунктов обслуживания:

$\left(a_1 \approx 177{,}78,\ a_2 \approx 533{,}33\right)$.

ПРОИЗВОЛЬНОЕ КОЛИЧЕСТВО ПУНКТОВ

В случае выполнения условия (2) для кусочно-постоянной функции f цепочка равенств (3) позволяет построить решение в явном виде и для большого количества пунктов обслуживания.

Пример 7. Пусть на всём отрезке функция f постоянна, что соответствует случаю наличия только одного жилого узла. Тогда условие равенства площадей, очевидно, может быть выполнено, только если точки a_1, $a_{1,2}$, a_2, $a_{2,3}$, ... делят отрезок на равные части. Отрезок делится на 2k равных частей и для размещения пунктов выбираются точки с нечётными номерами.

Пример 8. Найдём оптимальное размещение трёх, четырёх и пяти пунктов обслуживания для функции плотности.

Пусть точка a_1 имеет координату x. Для трёх пунктов рекуррентные выкладки приводят к уравнению

$$F(12) = 28 = 2F\left(a_3\right) - F\left(a_{2,3}\right) = \begin{cases} 6x, & 0 \le x < 0{,}8, \\ 26x-16, & 0{,}8 \le x < 1, \\ -6x+16, & 1 \le x \le 4/3, \\ 30x-32, & 4/3 < x \le 2, \\ -2x+32, & 2 < x \le 4, \\ 18x-48, & 4 < x \le 68/15. \end{cases}$$

Отсюда следует два варианта:

$$\begin{pmatrix} a_1 = 2,\ a_2 = 6, \\ a_3 = 10, \\ Q = 28 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 = 38/9,\ a_2 = 22/3, \\ a_3 = 94/9, \\ Q = 244/9 \end{pmatrix}.$$

Глобальный минимум обеспечивает второй из этих вариантов.

Теперь четыре пункта. Имеем:

$$F(12) = 28 = 2F\left(a_4\right) - F\left(a_{3,4}\right) = \begin{cases} 8x, & 0 \le x < 4/7, \\ 36x-16, & 4/7 \le x < 2/3, \\ -12x+16, & 2/3 \le x \le 0{,}8, \\ 48x-32, & 0{,}8 < x \le 1, \\ -16x+32, & 1 < x \le 4/3, \\ 44x-48, & 4/3 < x \le 68/37. \end{cases}$$

Отсюда находим оптимальный вариант:

$$\begin{pmatrix} a_1 = 19/11, a_2 = 57/11, \\ a_3 = 87/11, a_4 = 117/11, \\ Q = 218/11 \end{pmatrix}.$$

Для пяти пунктов обслуживания оптимальное расположение выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_1 = 46/29,\ a_2 = 138/29, \\ a_3 = 198/29,\ a_4 = 258/29, \\ a_5 = 318/29,\ Q = 452/29 \end{pmatrix}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена математическая модель, позволяющая выбрать наименее затратные для перемещения населения варианты размещения объектов повседневного спроса в городском микрорайоне в случае приблизительно равномерной плотности распределения.

Модель может быть использована при планировке жилых массивов и улично-дорожной сети, при нахождении оптимального расположения спасательных служб на транспорте, остановок городского автобуса и других пунктов социального назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев А. И. Почему все дороги ведут в Москву // Мир транспорта.–2005.– № 4.– С. 22–25.
2. Гусев С. А. Теоремы распределения ресурсов // Мир транспорта.– 2010.– № 3.– С. 30–35.
3. Гусев С. А. Функции дохода и профилактика рисков // Мир транспорта.– 2011.– № 3.– С. 88–91.
4. Гусев С. А. Линейные и дискретные функции безопасности // Мир транспорта.– 2012.– № 2.– С. 182–185.
5. Гусев А. И., Гусев С. А. Оптимальное расположение спасательной службы // Мир транспорта.– 2017.– № 4.– С. 194–201.

Координаты авторов: **Гусев А. И.** – aigus7@gmail.com, **Гусев С. А.** – 7781011@gmail.com, **Милевский А. С.** – a_s_mi@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 14.07.2017, принята к публикации 20.10.2017.

PROVISION OF OPTIMAL TRANSIT SERVICE UNDER EVEN DISTRIBUTION OF FACILITIES

Gusev, Anatoly I., *Russian University of Transport, Moscow, Russia.*
Gusev, Sergey A., *Insurance Joint Stock Company VSK, Moscow, Russia.*
Milevsky, Alexander S., *Russian University of Transport, Moscow, Russia.*

ABSTRACT

The article continues the topic of optimal location of objects in the system of network structures (see World of Transport and Transportation, 2017, Iss. 4 [5]), in particular, develops and focuses on theoretical and methodological approaches to modeling the distribution of service points for urban residents within the boundaries of a residential microdistrict with piecewise- constant density of settlement. The goal of such a scientifically grounded distribution is to minimize the costs of moving between objects, while observing rational proportions including transport demand with transport offers.

Keywords: uniform distribution law, mathematical model, social object, transport, urban microdistrict, optimal location, extremum of functions.

Background. *We all use transport, shops, hospitals, and it is convenient when a social institution, a transport service point are located near us, those areas where our work, study, housing are located. The same applies to the locations of emergency, fire, rescue and other services. Here we will consider the economic-mathematical model of the optimal location of social facilities for servicing the territory in the event of their piece-wise permanent deployment.*

Objective. *The objective of the authors is to consider theoretical and methodological approaches to modeling the distribution of service points within a residential microdistrict.*

Methods. *The authors use general scientific and engineering methods, mathematical apparatus, evaluation approach, modeling.*

Results.

Mathematical model

Let's consider the following model. Suppose we have a residential zone, located along the section [c, d] with a nonnegative population density $f(x)$. We assume that the function $f(x)$ is piecewise continuous. It is required to place on this section several service points so that the total costs of moving to them are minimal. It is assumed that the potential visitor uses the nearest service point.

We denote the points by a_i, i = 1, 2, ..., n (see Pic. 1). Respectively

$$a_{1,2}=\frac{a_1+a_2}{2},\ a_{2,3}=\frac{a_2+a_3}{2},\dots$$

– middle of the sections.

Each point a_i has some «attraction zone» to the left and to the right, going to it from the middle of the section connecting with the next point, or (at the ends) from the extreme points c or d. The costs are proportional to the expression

$$Q(a)=\int_c^{a_1}(a_1-x)f(x)dx+\int_{a_1}^{a_{1,2}}(x-a_1)f(x)dx+$$
$$+\int_{a_{1,2}}^{a_2}(a_2-x)f(x)dx+\int_{a_2}^{a_{2,3}}(x-a_2)f(x)dx+\ldots+$$
$$+\int_{a_{n-1,n}}^{a_n}(a_n-x)f(x)dx+\int_{a_n}^{d}(x-a_n)f(x)dx.$$

We write down the extremum conditions for the objective function Q. Calculating the partial derivatives, we find:

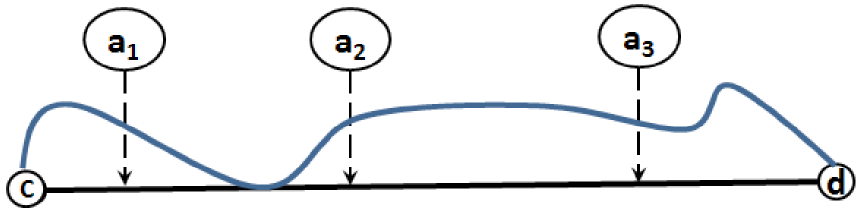
$$\frac{\partial Q}{\partial a_1}=\int_c^{a_1}f(x)dx-\int_{a_1}^{a_{1,2}}f(x)dx,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_2}=\int_{a_{1,2}}^{a_2}f(x)dx-\int_{a_2}^{a_{2,3}}f(x)dx,\ldots,$$

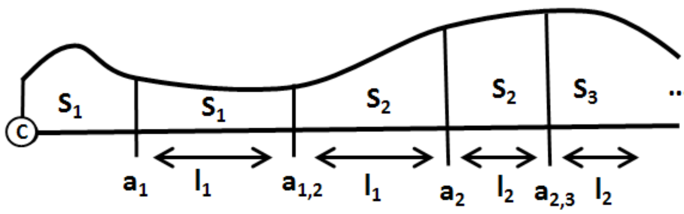
$$\frac{\partial Q}{\partial a_n}=\int_{a_{n-1,n}}^{a_n}f(x)dx-\int_{a_n}^{d}f(x)dx.$$

Equating the derivatives to zero, we obtain for each placed point the necessary conditions for the extremum in the form of the equality of the «population» in the left and right «attraction zones»:

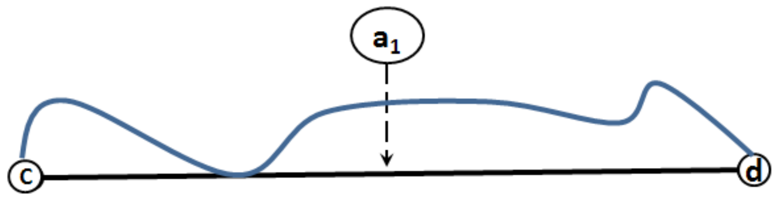
$$\begin{cases}\int_c^{a_1}f(x)dx=\int_{a_1}^{a_{1,2}}f(x)dx\\ \int_{a_{1,2}}^{a_2}f(x)dx=\int_{a_2}^{a_{2,3}}f(x)dx\\ \ldots\\ \int_{a_{n-1,n}}^{a_n}f(x)dx=\int_{a_n}^{d}f(x)dx.\end{cases}\qquad(1)$$



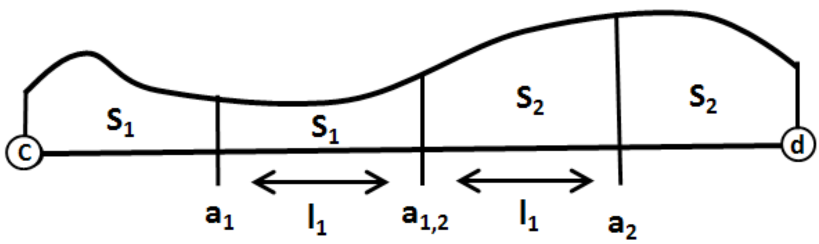
Pic. 1. Placement of objects.



Pic. 2. Necessary conditions for optimality



Pic. 3. One service point.



Pic. 4. Necessary optimality conditions for two points.

These conditions can easily be obtained by simple reasoning. Let there be no equality of population in the left and right attraction zones of a certain point. Then, for example, if the right area is «larger» than the left one, then a small shift of the item to the right will obviously reduce costs. This means that there is no extremum.

We rewrite conditions (1) in a more convenient form, using the notation

$$F(x)=\int_c^x f(t)dt.$$

Then we obtain a chain of equations

$$F(a_{1,2})=2F(a_1),\quad F(a_{2,3})=2F(a_2)-F(a_{1,2}),$$
$$F(a_{3,4})=2F(a_3)-F(a_{2,3}),\ldots,$$
$$F(d)=2F(a_n)-F(a_{n-1,n}).$$

In the assumption[1]
zeros of the function f(x) – isolated (2)
there is a chain of recurrence formulas:

$$a_{1,2}=G(2F(a_1)),\quad a_2=2a_{1,2}-a_1,$$
$$a_{2,3}=G(2F(a_2)-F(a_{1,2})),\quad a_3=2a_{2,3}-a_2,\ldots,$$
$$d=G(2F(a_n)-F(a_{n-1,n}))\Leftrightarrow \quad (3)$$
$$\Leftrightarrow F(d)=2F(a_n)-F(a_{n-1,n}),$$

[1] The case when this condition is violated will be discussed further.

where G(x) – function, inverse of F(x). Substituting each equality into the next one, we obtain an equation of the form

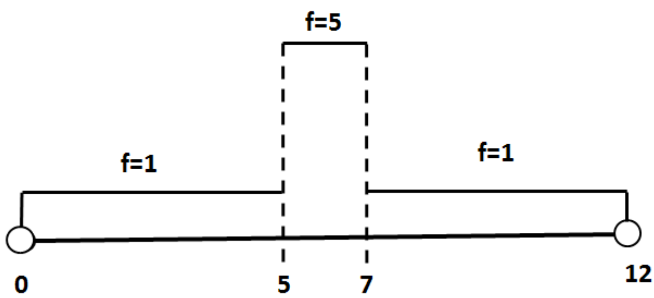
$H(a_1)=F(d)$ (4)

with some function H(x). The set of solutions of such an equation (which, as we shall see, may even be a continuum) determines the location of the first service station. Next points under condition (2) are uniquely determined by the recurrence formulas (3) (see Pic. 2).

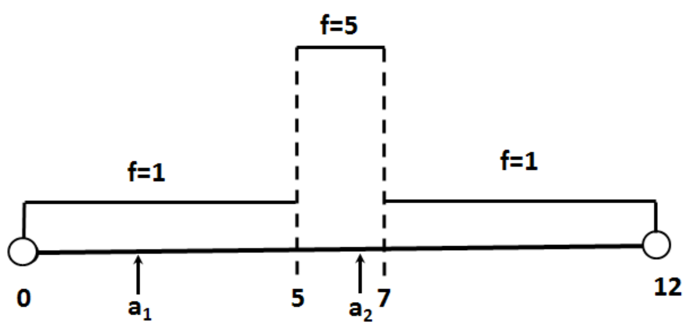
The variants found in this way satisfy the necessary extremum conditions, that is, they are stationary points of the function Q, but are not necessarily its local minima. The presence and form of the extremum, as a rule, can be determined by calculating partial derivatives of the second order:

$$\frac{\partial^2 F}{(\partial a_1)^2}=2f_1-0{,}5f_{1,2},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2}=-0{,}5f_{1,2}$$
$$\frac{\partial^2 F}{(\partial a_2)^2}=2f_2-0{,}5f_{1,2}-0{,}5f_{2,3},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_2 \partial a_3}=-0{,}5f_{2,3},\ldots,$$

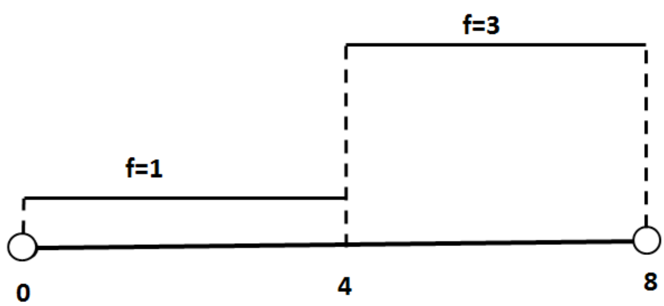
where the notations $f_i = f(a_i)$, $f_{i,j} = f(a_{i,j})$ are used.



Pic. 5. An example of a symmetric distribution.



Pic. 6. Optimal placement.



Pic. 7. An example of distribution.

As a result, we obtain the following (three-diagonal) Hessian matrix:

$$\begin{pmatrix} 2f_1 - 0{,}5f_{1,2} & -0{,}5f_{1,2} & 0 & \dots \\ -0{,}5f_{1,2} & 2f_2 - 0{,}5f_{1,2} - 0{,}5f_{2,3} & -0{,}5f_{2,3} & \dots \\ 0 & -0{,}5f_{2,3} & 2f_2 - 0{,}5f_{1,2} - 0{,}5f_{2,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

To apply the Sylvester criterion, it is required that the function f(x) be continuous in the vicinity of the points a_i.

Let's consider simple special cases.

One service point

In this situation, the necessary conditions (1) become

$$\int_c^{a_1} f(x)dx = \int_{a_1}^{d} f(x)dx,$$

that is, the point a_1 should divide the «population» into two equal parts (see Pic. 3). It is clear that such a «median» point is

- *either one (in particular, this will happen when condition (2) is satisfied);*
- *or «median» points form a whole section [α; β] (where $\alpha \neq c$; $\beta \neq d$).*

In the latter case, $f(x) \equiv 0$ on the whole section (at the points α and β, we can redefine f by continuity). That is, all points of the section [α; β] give the same value of the objective function. On leaving the section [α; β], Q values increase, so that each median point is an acceptable response.

Two service points

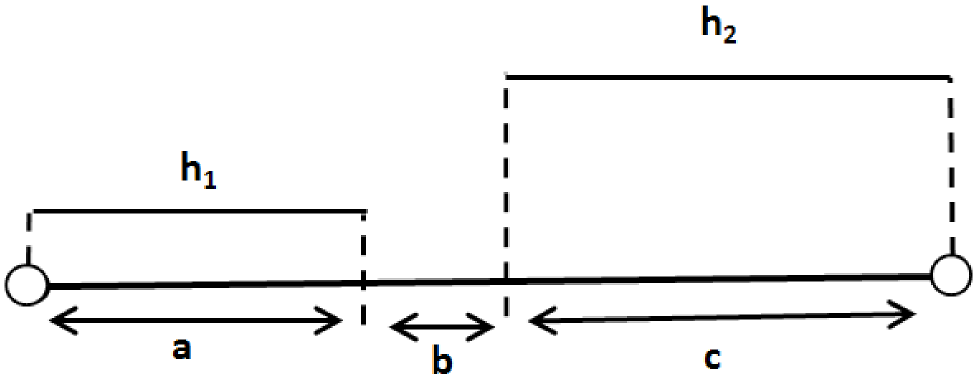
In this situation, the necessary conditions (1) become conditions for the «balance» of attraction zones:

$$\begin{cases} \int_c^{a_1} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_{1,2}} f(x)dx \\ \int_{a_{1,2}}^{a_2} f(x)dx = \int_{a_2}^{d} f(x)dx. \end{cases}$$

The graphically necessary condition for the extremum looks as shown in Pic. 4.

In particular, $F(d) = 2S_1 + 2S_2$, $F(a_2) - F(a_1) = S_1 + S_2 = F(d)/2$.

The recurrence relations (3) in this case are written as follows:



Pic. 8. The presence of a «zero» zone.

$$a_{1,2}=G\left(2F\left(a_1\right)\right),\quad a_2=2a_{1,2}-a_1,$$
$$F\left(d\right)=2F\left(a_2\right)-F\left(a_{1,2}\right),$$

and equation (4) takes the form

$$2F\left(2G\left(2F\left(a_1\right)\right)-a_1\right)-2F\left(a_1\right)=F\left(d\right).$$

Accordingly, the Hessian matrix:

$$A=\begin{pmatrix}2f_1-0{,}5f_{1,2} & -0{,}5f_{1,2}\\ -0{,}5f_{1,2} & 2f_2-0{,}5f_{1,2}\end{pmatrix}.$$

Thus, under the assumption that the function f(x) is continuous in the vicinity of the points a_1 and a_2, the Sylvester criterion gives the following sufficient conditions for a local minimum:

$$\begin{aligned}&4f_1>f_{1,2},\\&4f_1f_2>f_{1,2}\left(f_1+f_2\right).\end{aligned}\qquad(5)$$

Example 1. *Let's take the following situation (see Pic. 5).*

Then

$$F\left(x\right)=\begin{cases}x, & 0\le x<5,\\ 5x-20, & 5\le x<7,\\ x+8, & 7\le x\le 12,\end{cases}$$

$$G\left(x\right)=F^{-1}\left(x\right)=\begin{cases}x, & 0\le x<5,\\ (x+20)/5, & 5\le x<15,\\ x-8, & 15\le x\le 20.\end{cases}$$

Let the point a_1 have the coordinate x. From the relations (3) we obtain successively

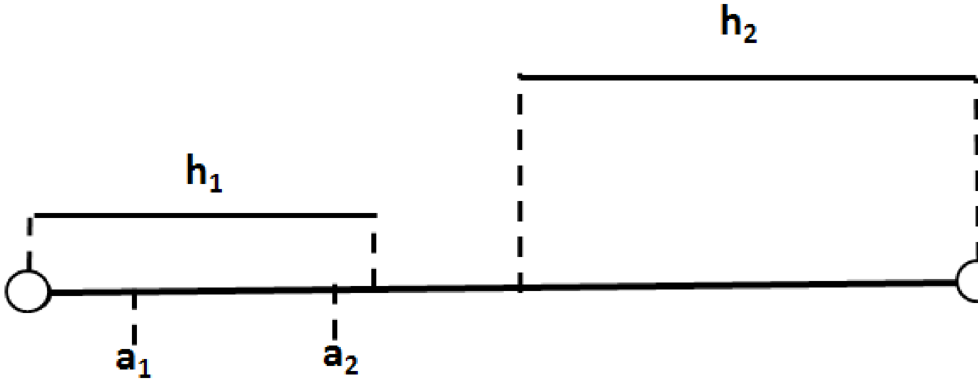
$$S_1=F\left(x\right),\quad a_{1,2}=G\left(2F\left(a_1\right)\right)=\begin{cases}2x, & 0\le x<2{,}5,\\ 0{,}4x+4, & 2{,}5\le x<5,\\ 2x-4, & 5\le x<5{,}5,\\ 10x-48, & 5{,}5\le x\le 6,\end{cases}$$

$$a_2=2a_{1,2}-a_1=\begin{cases}3x, & 0\le x<2{,}5,\\ -0{,}2x+8, & 2{,}5\le x<5,\\ 3x-8, & 5\le x<5{,}5,\\ 19x-96, & 5{,}5\le x\le 6,\end{cases}$$

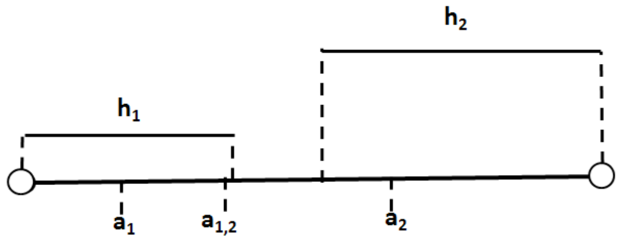
$$F\left(12\right)=20=2F\left(a_2\right)-F\left(a_{1,2}\right)=\begin{cases}4x, & 0\le x<5/3,\\ 28x-40, & 5/3\le x<7/3,\\ 4x+16, & 7/3\le x<2{,}5,\\ -2{,}4x+32, & 2{,}5\le x<5,\\ -4x+40, & 5\le x\le 5{,}5,\\ 28x-136, & 5{,}5\le x\le 6.\end{cases}$$

Hence we find three options:

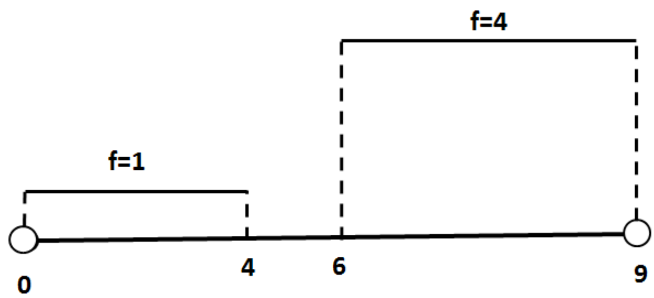
$$\begin{pmatrix}a_1=15/7, a_2=45/7,\\ Q=190/7\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_1=5, a_2=7,\\ Q=30\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}a_1=39/7, a_2=69/7,\\ Q=190/7\end{pmatrix}.$$



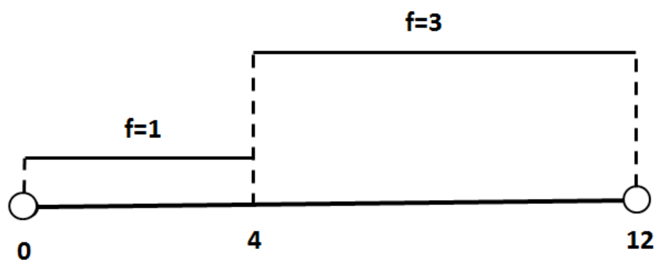
Pic. 9. Possible placement of points.



Pic. 10. Other possible placement of points.



Pic. 11. An example of distribution.



Pic. 12. An example of distribution.

The average, symmetric, is the local maximum of the objective function Q. The answers for the original task are the first variant (Pic. 6) and the third symmetric to it.

Example 2. *Let's consider the situation in Pic. 7.*

Analogous calculations lead to the equation

$$F(8)=16=2F(a_2)-F(a_{1,2})=\begin{cases}4x, & 0\le x<4/3,\\ 16x-16, & 4/3\le x<2,\\ 16, & 2\le x\le 4,\\ 12x-32, & 4<x\le 40/9.\end{cases}$$

The solution of this equation relative to x is the <u>*whole section*</u> *[2; 4]. As it is easy to verify, the value of the objective function is constant and equal to 16. The answer for the initial task is*

$$\begin{pmatrix} a_1=x, \quad 2\le x\le 4,\\ a_2=\frac{1}{3}x+\frac{16}{3},\\ Q=16\end{pmatrix}.$$

Two points in violation of condition (2)

Now the situation when the condition (2) is violated and the function f turns to 0 on the inner section (Pic. 8).

Let it be necessary to place two service points.

1) First, the case where both points are placed on the left section (see Pic. 9).

From the condition of equality of areas we find

$$a_{1,2}=2a_1, \quad a_2=3a_1, \quad h_1\cdot a_1=h_1(a-a_2)+h_2\cdot c,$$

hence

$$a_1=\frac{1}{4}(a+Kc), \quad a_2=\frac{3}{4}(a+Kc), \quad K=\frac{h_2}{h_1}.$$

Both points really lie in the first section, if in addition

$$\frac{3}{4}(a+Kc)\le a \quad \Leftrightarrow \quad a\ge 3Kc,$$

or if we introduce the notation $a\cdot h_1=I_1$, $c\cdot h_2=I_2$ *– the number of «inhabitants»*

$I_1\ge 3I_2$. (6)

This arrangement, as is evident from condition (5), provides a local minimum of the objective function. The value of the function Q is:

$$Q=h_1\int_0^{2a_1}|a_1-x|dx+h_1\int_{2a_1}^{a}|3a_1-x|dx+h_2\int_{a+b}^{a+b+c}(x-3a_1)dx=$$

$$=h_1\frac{3a_1^2}{2}+h_1\frac{(a-3a_1)^2}{2}+h_2\frac{(a+b+c-3a_1)^2}{2}-h_2\frac{(a+b-3a_1)^2}{2}.$$

2) The case where both service points are located in the right zone is reduced to the previous via obvious re-designations:

$$a\leftrightarrow c, \quad h_1\leftrightarrow h_2, \quad x\leftrightarrow a+b+c-x.$$

It remains to consider the case where in the first and third zones there is one service point.

3) Immediately note that if the «central» point $a_{1,2}$ falls on the middle, «zero» section, then the only way to ensure equality of areas is to place points in the middle of the left and right sections. Then

$$\begin{pmatrix} a_1=\frac{a}{2},\ a_2=a+b+\frac{c}{2} \\ Q=\frac{h_1\cdot a^2+h_2\cdot c^2}{4} \end{pmatrix}.$$

The point $a_{1,2}$ does indeed fall into the middle section under the condition

$$|c-a|\le 2b. \qquad (7)$$

4) Let's now take the case (Pic. 10), when the point $a_{1,2}$ falls on the left section (with the right one all the same).

Again from the equality of areas:

$$a_{1,2}=2a_1,\quad a_2=3a_1,$$
$$h_1\cdot(a-a_{1,2})+h_2(a_2-a-b)=h_2\cdot(a+b+c-a_2).$$

Hence when $K\neq 1/3$:

$$a_1=\frac{K(a+b+c/2)-a/2}{3K-1}.$$

If $K<1/3$, then the second of the inequalities (5) has the opposite sign, so there is no extremum.

If $K>1/3$, then additional requirements arise:

$$0\le a_{1,2}=\frac{2K(a+b+c/2)-a}{3K-1}\le a;$$
$$a+b\le a_2=3a_1\le a+b+c.$$

If $K=1/3$, then, depending on the value of the numerator, fractions for a_1 stationary points of the form in question are either not at all, or they can form a whole range of possible values. Indeed, a stationary arrangement of this kind is possible only if $a+b+c/2=3a/2$, that is, $a=2b+c$. And it is easy to understand that then the solution is any pair (a_1; $3a_1$), where $(a+b)/3\le a_1\le a/2$.

Example 3. *Let's consider the situation in Pic. 11.*

In this case, $a=4$, $b=2$, $c=3$, $K=4$. For the «central» location of service points:

$$\begin{pmatrix} a_1=2,\ a_2=7{,}5, \\ Q=13 \end{pmatrix}.$$

If $a_{1,2}\le 4$, then

$$a_1=\frac{a_{1,2}}{2},\quad a_2=2a_{1,2}-a_1\le 6,$$

which is impossible due to violation of the condition of equality of areas.

Since $I_2\ge 3I_1$ ($12\ge 12$), there are two points on the right section. We find them using the formulas:

$$a_1=\frac{1}{4}(a+Kc),\quad a_2=\frac{3}{4}(a+Kc),\quad K=\frac{h_2}{h_1}.$$

But in the «opposite» direction:

$$\begin{pmatrix} a_1=6,\ a_2=8, \\ Q=26. \end{pmatrix}.$$

This option is inferior to the «central» option.

Example 4. *Suppose that there are two residential units T_1 and T_2 in the service area with the corresponding sections of uniform distribution – [0, 400 m], [500 m, 700 m], and the «intensity» of residential units is 3000, 500. It is required to place two service points.*

We have:

$$a=400,\quad I_1=3000,\quad I_2=500,$$
$$h_1=\frac{3000}{400}=7{,}5,\quad c=700-500=200,$$
$$h_2=\frac{500}{200}=2{,}5.$$
$$b=500-400=100,\quad K=\frac{2{,}5}{7{,}5}=\frac{1}{3}.$$

Condition (6) is satisfied, so that we first consider the case when both points are placed on the first section. We have:

$$a_1=\frac{1}{4}(a+Kc)=\frac{400+200/3}{4}\approx 116{,}67,\quad a_2=3a_1=350.$$

Objective function value

$$Q=h_1\frac{3a_1^2}{2}+h_1\frac{(a-3a_1)^2}{2}+h_2\frac{(a+b+c-3a_1)^2}{2}-$$
$$-h_2\frac{(a+b-3a_1)^2}{2}=287500.$$

The condition (7) is also satisfied here, so we can also consider the «central» arrangement of service points:

$$\begin{pmatrix} a_1=a/2=200, \\ a_2=a+b+c/2=600, \\ Q=(h_1\cdot a^2+h_2\cdot c^2)/4=300000 \end{pmatrix}.$$

This option is worse.

Finally, we take the case when the service points are located in both the first and the third zones, and the middle point is in the first zone.

Since $a+b+c/2=3a/2$, the solution is any pair (a_1;$3a_1$), where $(a+b)/3\le a_1\le a/2$, i.e. points

$$\begin{pmatrix} \frac{500}{3}\le a_1\le 200, \\ a_2=3a_1, \\ Q=325500 \end{pmatrix}$$

are stationary. But this option is also inferior to the first.

So, the optimal location of service points is:

$$\begin{pmatrix} a_1\approx 116{,}67,\ a_2=350, \\ Q\approx 287500. \end{pmatrix}.$$

Example 5. *In the previous example, we change the third section from [500 m, 700 m] to [450 m, 650 m]. Then, as before*

$$a=400,\quad h_1=7{,}5,\quad c=200,\quad h_2=2{,}5,\quad K=\frac{2{,}5}{7{,}5}=\frac{1}{3}.$$

only b will change. A variant with a continuous arrangement of stationary points becomes impossible, and from the other two optimal as before remains

$$(a_1\approx 116{,}67,\ a_2=350).$$

Example 6. *Let there be two residential units T_1 and T_2 in the service area with the corresponding sections of the uniform distribution – [0, 400 m], [500 m, 600 m], and the «intensities» of the residential units are respectively equal to 3000, 1000. It is required to place two service points.*

$$a=400,\quad I_1=3000,\ I_2=500,$$
$$h_1=\frac{3000}{400}=7{,}5,\quad c=600-500=100,$$
$$h_2=\frac{1000}{100}=10.\ b=500-400=100,$$
$$K=\frac{10}{7{,}5}=\frac{4}{3}.$$

Condition (6) $I_1 \geq 3I_2$ is satisfied, therefore we consider first the case when both service points are located in the first section. We have:

$$a_1=\frac{1}{4}(a+Kc)=\frac{400+400/3}{4}\approx 133{,}33,\quad a_2=3a_1=400.$$

Objective function value

$$Q=h_1\frac{3a_1^{\,2}}{2}+h_1\frac{(a-3a_1)^2}{2}+h_2\frac{(a+b+c-3a_1)^2}{2}-$$
$$-h_2\frac{(a+b-3a_1)^2}{2}=350000.$$

The condition (7) is not satisfied, so that the «central» arrangement of the points is not considered.

The option remains, when the service points are located in the extreme zones and the middle point does not fall into the zero section.

$$a_1=\frac{K(a+b+c/2)-a/2}{3K-1}\approx 177{,}78,\quad a_2=3a_1\approx 533{,}33.$$

In this case, the midpoint hit the first section, and the value of the objective function Q = 316666,67, which is better.

So, the optimal location of service points:
$(a_1\approx 177{,}78,\ a_2\approx 533{,}33)$.

Arbitrary number of points

If condition (2) is satisfied for a piecewise constant function f, the chain of equalities (3) makes it possible to construct a solution explicitly for a large number of service points.

Example 7. *Let the function f be constant throughout the section, which corresponds to the presence of only one residential unit. Then the equality condition for the areas can obviously be satisfied only if the points a_1, $a_{1,2}$, a_2, $a_{2,3}$, ... divide the section into equal parts. The segment is divided into 2k equal parts, and points with odd numbers are chosen to place the points.*

Example 8. *Let's find the optimal arrangement of three, four and five service points for the density function:*

Let the point a_1 have the coordinate x. For three points, recurrent calculations lead to the equation

$$F(12)=28=2F(a_3)-F(a_{2,3})=\begin{cases}6x, & 0\le x<0{,}8,\\ 26x-16, & 0{,}8\le x<1,\\ -6x+16, & 1\le x\le 4/3,\\ 30x-32, & 4/3<x\le 2,\\ -2x+32, & 2<x\le 4,\\ 18x-48, & 4<x\le 68/15.\end{cases}$$

Hence there are two options:

$$\begin{pmatrix}a_1=2,\ a_2=6,\ a_3=10,\\ Q=28\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}a_1=38/9,\ a_2=22/3,\ a_3=94/9,\\ Q=244/9\end{pmatrix}.$$

The global minimum is provided by the second of these options.

Now four points. We have:

$$F(12)=28=2F(a_4)-F(a_{3,4})=$$
$$=\begin{cases}8x, & 0\le x<4/7,\\ 36x-16, & 4/7\le x<2/3,\\ -12x+16, & 2/3\le x\le 0{,}8,\\ 48x-32, & 0{,}8<x\le 1,\\ -16x+32, & 1<x\le 4/3,\\ 44x-48, & 4/3<x\le 68/37.\end{cases}$$

Hence we find the best option:

$$\begin{pmatrix}a_1=19/11, a_2=57/11, a_3=87/11, a_4=117/11,\\ Q=218/11\end{pmatrix}.$$

For five service points, the optimal location is as follows:

$$\begin{pmatrix}a_1=46/29,\ a_2=138/29,\ a_3=198/29,\\ a_4=258/29,\ a_5=318/29,\\ Q=452/29\end{pmatrix}.$$

Conclusion. *The developed mathematical model allows selecting options of siting of everyday demanded facilities within an urban district (under the condition of approximately even distribution of their density), which are less expensive for transit of inhabitants.*

The model can be used in the planning of residential areas and the street-road network, while finding the optimal location of rescue services in transport, bus stops and other social facilities.

REFERENCES

1. Gusev, A. I. Why do all the Roads Lead to Moscow? *World of Transport and Transportation*, Vol.3, 2005, Iss. 4, pp. 22–25.
2. Gusev, S. A. Theorems of Resource Allocation. *World of Transport and Transportation*, Vol. 8, 2010, Iss. 3, pp. 30–35.
3. Gusev, S. A. Income Functions and Risk Prevention. *World of Transport and Transportation*, Vol. 9, 2011, Iss. 3, pp.88–91.
4. Gusev, S. A. Linear and Discrete Functions of the Safety. *World of Transport and Transportation*, Vol.10, 2012, Iss. 2, pp.182–185.
5. Gusev, A. I., Gusev, S. A. Optimal Location of Rescue Service. *World of Transport and Transportation*, Vol. 15, 2017, Iss. 4, pp. 194–201.

Information about the authors:

Gusev, Anatoly I. – Ph.D. (Physics and Mathematics), associate professor of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia, aigus7@gmail.com.

Gusev, Sergey A. – general manager of Insurance Joint Stock Company VSK, Moscow, Russia, 7781011@gmail.com.

Milevsky, Alexander S. – Ph.D. (Physics and Mathematics), associate professor of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia, a_s_mi@mail.ru.

Article received 14.07.2017, accepted 20.10.2017.